# Unidad 2 : Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

## Tema 2.5a : Método de Coeficientes Indeterminados

En esta sección estudiaremos uno de los dos métodos para resolver EDL No-Homogéneas de orden mayor o igual a dos. Empezaremos con las EDLNH de 2o orden de la forma estándar: $ay'' + by' + cy = g(x)$ . Este método, llamado Método de Coeficientes Indeterminados, puede aplicarse cuando la función g(x) contiene solo tres tipos de funciones: polinomios, exponenciales, y senos y cosenos, o combinaciones de ellas.

1. Se resuelve la EDLH asociada para determinar $y_h$
2. Se propone la forma de $y_p$ con coeficientes indeterminados, a partir de la forma del término g(x); usando el criterio de la siguiente tabla

| g(x) | $y_p(x)$ propuesta |
|---|---|
| $a_m x^m + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ | $A_m x^m + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$ |
| $e^{\alpha x} \cdot (a_m x^m + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$ | $e^{\alpha x} \cdot (A_m x^m + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0)$ |
| $p_m(x)\cos(\beta x) + q_n(x) sen(\beta x)$ | $p_k(x)\cos(\beta x) + q_k(x) sen(\beta x)\,;\, k = \max(m,n)$ |
| $p_m(x) e^{\alpha x}\cos(\beta x) + q_n(x) e^{\alpha x} sen(\beta x)$ | $p_k(x) e^{\alpha x}\cos(\beta x) + q_k(x) e^{\alpha x} sen(\beta x); k = \max(m,n)$ |

$p_m(x) \quad y \quad q_n(x)$ son polinomios de orden “n” y “m”

3. Se modifica la $y_p$ <u>propuesta</u> comparándola con $y_h$ y multiplicando por “x” los términos de $y_p$ que estén incluidos en $y_h$. Después se vuelve a comparar $y_p$ con $y_h$ y se vuelven a multiplicar por “x” los términos que sigan estando incluidos en $y_h$. Este proceso se continúa repitiendo hasta que ninguno de los términos de $y_h$ esté repetido en $y_p$.

4. Se sustituye la $y_p$ <u>modificada</u> en la EDLNH original para determinar los coeficientes indeterminados igualando los coeficientes de los términos del lado izquierdo de la ecuación con los coeficientes de los términos semejantes del lado derecho de la ecuación.

5. Se sustituyen los coeficientes que se han determinado en la forma de la $y_p$ modificada para determinar la $y_p$ final. Y finalmente se suman $y_p$ y $y_h$ para obtener la solución general de la EDLNH $y = y_h + y_p$

| Algunos ejemplos de la forma de proponer $y_p$ dependiendo de $y_h$ | | | |
|---|---|---|---|
| **g(x)** | **$y_p$(x) propuesta** | **g(x)** | **$y_p$(x) propuesta** |
| -8 | A | 7cos(4x) | Asen(4x)+Bcos(4x) |
| 5x+7 | Ax + B | $-3e^{5x}$ | $A\ e^{5x}$ |
| $3x^2-2$ | $A\ x^2+Bx+C$ | $(3\ x^2+2)\ e^{5x}$ | $(A\ x^2\ +Bx\ +C)\ e^{5x}$ |
| $2x^3-5x+7$ | $A\ x^3+B\ x^2+Cx+D$ | $5\ x^2\cos(4x)$ | $(A\ x^2+Bx+C)\cos(4x)+$<br>$(D\ x^2+Ex+F)\text{sen}(4x)$ |
| 5sen(4x) | Asen(4x)+Bcos(4x) | $-3x\ e^{5x}\ \cos(4x)$ | $(Ax+B)\ e^{5x}\ \cos(4x)+$<br>$(Cx+D)\ e^{5x}\ \text{sen}(4x)$ |

| | |
|---|---|
| **<u>Ejemplos para la clase:</u>**<br>(Sin repetición de términos)<br><br>$E1: \quad y'' + 4y' + 4y = 4x^2 - 8x$<br>$E2: \quad y'' + 2y' + y = senx + 3\cos 2x$ | $R1: \quad y_p = x^2 - 4x + \frac{7}{2}$<br>$R2: \quad y_p = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{25} sen2x - \frac{9}{25}\cos 2x$ |
| **<u>Ejemplos para la clase:</u>**<br>(Con repetición de términos)<br><br>$E3: \quad y'' + 4y = 3sen2x$<br>$E4: \quad y'' - 2y' + y = e^x$<br>$E5: \quad y'' + y = 4x + 10senx$<br>$E6: \quad y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$ | $R3: \quad y_p = -\frac{3}{4}x\cos 2x$<br>$R4: \quad y_p = \frac{1}{2}x^2 e^x$<br>$R5: \quad y_p = 4x - 5x\cos x$<br>$R6: \quad y_p = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2 e^{3x}$ |

Mas ejemplos para determinar la $y_p$ propuesta y modificada:

$E1)\quad y^{(4)} + y''' = 1 - x^2 e^{-x}$

$E2)\quad y'' + y = x\cos x - \cos x$

$E3)\quad y''' - 4y'' + 4y' = 5x^2 - 6x + 4x^2 e^{2x} + 3e^{5x}$

---

$R1)\quad y_p = Ax^3 + Bx^3 e^{-x} + Cx^2 e^{-x} + Dxe^{-x}$

$R2)\quad y_p = Ax\cos x + Bx\sin x + Cx^2 \cos x + Dx^2 \sin x$

$R3)\quad y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + Dx^4 e^{2x} + Ex^3 e^{2x} + Fx^2 e^{2x} + Ge^{5x}$

---

**<u>Para la próxima clase estudiar las secciones:</u>**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4.4 | Zill | 4.8 y 6.3 | Nagle | Método de Coeficientes Indeterminados |
| 4.6 | Zill | 4.9 y 6.4 | Nagle | Método de Variación de Parámetros |

**<u>Tarea para entregar la próxima clase:</u>**

Tarea No. 15 : Método de Coeficientes Indeterminados

## Unidad 2: Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

### Tema 2.5 b : Método de Coeficientes Indeterminados

**Ejemplo** de:
a) el proceso de construcción de la $y_p(x)$ propuesta a partir de la forma de la función $g(x)$, y de
b) el proceso de modificación de la $y_p(x)$ propuesta al compararla con la solución de la EDLH asociada $y_h(x)$

a) Ejemplo del proceso de construcción de la $y_p(x)$propuesta a partir de la forma de la función $g(x)$

$$g(x) = \underbrace{3x^4 - 5x^2 + 8}_{g_1(x)} + \underbrace{6e^{5x}}_{g_2(x)} + \underbrace{3\cos 2x}_{g_3(x)}$$

| | |
|---|---|
| $g_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 8$ | $y_{p_1} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ |
| $g_2(x) = 6e^{5x}$ | $y_{p_2} = Fe^{5x}$ |
| $g_3(x) = 3\cos 2x$ | $y_{p_3} = G\cos 2x + Hsen2x$ |

la $y_p(x)$ propuesta se construye sumando las tres $y_p(x)$'s

$$y_p(x) = \underbrace{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}_{y_{p1}} + \underbrace{Fe^{5x}}_{y_{p2}} + \underbrace{G\cos 2x + Hsen2x}_{y_{p3}}$$

b) **Ejemplo 1**: Cuando se repite un término de $y_{p_2}$ con un término de $y_h$

$$y'' - 10y' + 25y = 3x^4 - 5x^2 + 8 + 6e^{5x} + 3\cos 2x$$
$$m^2 - 10m + 25 = 0$$
$$(m-5)(m-5) = 0$$
$$y_h = c_1 e^{5x} + c_2 xe^{5x}$$

$$y_{p_2} = Fe^{5x} \sim y_h$$
$$y_{p_2} = Fxe^{5x} \sim y_h$$
$$y_{p_2} = Fx^2 e^{5x} \sim y_h$$

por lo que la $y_p(x)$ modificada será:

$$\underline{\underline{y_p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + C + Fx^2e^{5x} + G\cos 2x + Hsen2x}}$$

b) **Ejemplo 2**: Cuando se repiten tres términos de $y_{p_1}$ con tres términos de $y_h$

la $y_p(x)$ propuesta se construye sumando las tres $y_p(x)$'s

$$y_p(x) = \underbrace{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}_{y_{p1}} + \underbrace{Fe^{5x}}_{y_{p2}} + \underbrace{G\cos 2x + Hsen2x}_{y_{p3}}$$

$$y''' = 3x^4 - 5x^2 + 8 + 6e^{5x} + 3\cos 2x$$

$$m^3 = 0$$

$$m \cdot m \cdot m = 0$$

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

$$y_{p_1} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \sim y_h$$

$$y_{p_1} = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex \sim y_h$$

$$y_{p_1} = Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 + Dx^3 + Ex^2 \sim y_h$$

$$y_{p_1} = Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 \sim y_h$$

por lo que la $y_p(x)$ modificada será:

$$y_p(x) = Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fe^{5x} + G\cos 2x + Hsen2x$$

b) **Ejemplo 3**: Cuando se repiten dos términos de $y_{p_3}$ con dos términos de $y_h$

la $y_p(x)$ propuesta se construye sumando las tres $y_p(x)$'s

$$y_p(x) = \underbrace{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}_{y_{p1}} + \underbrace{Fe^{5x}}_{y_{p2}} + \underbrace{G\cos 2x + Hsen2x}_{y_{p3}}$$

$$y'' + 4y = 3x^4 - 5x^2 + 8 + 6e^{5x} + 3\cos 2x$$

$$m^2 + 4 = 0$$

$$m = \pm 2i$$

$$\alpha = 0; \beta = 2$$

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 sen2x$$

$$y_{p_3} = G\cos 2x + Hsen2x \sim y_h$$

$$y_{p_3} = Gx\cos 2x + Hxsen2x \sim y_h$$

por lo que la $y_p(x)$ modificada será:

$$y_p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + C + Fe^{5x} + Gx\cos 2x + Hxsen2x$$

## Unidad 2: Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

### Tema 2.5c : Método de Coeficientes Indeterminados

Ejemplo del proceso para determinar la forma de la solución particular $y_p(x)$ a partir de la forma de la función $g(x)$, en el caso de que $g(x)$ contenga productos de dos de las tres funciones básicas, esto es, de polinomios, senos y cosenos, y exponenciales

Ejemplo del proceso de construcción de la $y_p(x)$ propuesta a partir de la forma de la función $g(x)$

$$g(x) = \underbrace{5x^3e^{4x}}_{g_1(x)} - \underbrace{3x^2\cos 5x}_{g_2(x)} + \underbrace{2e^{3x}sen4x}_{g_3(x)}$$

| | |
|---|---|
| $g_1(x) = 5x^3e^{4x}$ | $y_{p_1} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{4x}$<br>$y_{p_1} = Ax^3e^{4x} + Bx^2e^{4x} + Cxe^{4x} + De^{4x}$ |
| $g_2(x) = -3x^2\cos 5x$ | $y_{p_2} = (Ex^2 + Fx + G)\cos 5x + (Hx^2 + Ix + J)sen5x$<br>$y_{p_2} = Ex^2\cos 5x + Fx\cos 5x + G\cos 5x +$<br>$Hx^2sen5x + Ixsen5x + Jsen5x$ |
| $g_3(x) = 2e^{3x}sen4x$ | $y_{p_3} = e^{3x}(K\cos 4x + Lsen4x)$<br>$y_{p_3} = Ke^{3x}\cos 4x + Le^{3x}sen4x$ |

La $y_p(x)$ propuesta se construye sumando las tres $y_p(x)$'s

$$y_p = Ax^3e^{4x} + Bx^2e^{4x} + Cxe^{4x} + De^{4x} + Ex^2\cos 5x + Fx\cos 5x + G\cos 5x +$$
$$Hx^2sen5x + Ixsen5x + Jsen5x + Ke^{3x}\cos 4x + Le^{3x}sen4x$$

| Ma-841 : ECUACIONES DIFERENCIALES<br>Tarea No. 15 : Método de Coeficientes Indeterminados | | |
|---|---|---|
| Encuentre la solución general de las siguientes EDL No Homogéneas. | | |
| | Ecuación Diferencial | Solución |
| 1 | $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$ | $y = c_1 e^{3x/2} + c_2 e^{-x/2}$ $-\dfrac{19}{425}\cos 2x - \dfrac{8}{425} sen 2x$ |
| 2 | $y'' + y' - 6y = 2x$ | $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{18}$ |
| 3 | $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$ | $y = c_1 e^{-2x} + c_2 + \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \dfrac{1}{2}xe^{-2x}$ |
| 4 | $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x+2)e^{4x}$ | $y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{4x} - \dfrac{2}{3}$ $-\left(\dfrac{1}{20}x^2 + \dfrac{19}{100}x\right)e^{4x}$ |
| 5 | $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^{x}$ | $y = c_1 e^{x} + c_2 xe^{x} + c_3 x^2 e^{x}$ $- x - 3 - \dfrac{2}{3}x^3 e^{x}$ |
| 6 | $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}$<br>$y(0) = 2\,,\ \ y'(0) = 5$ | $y = 2e^{-2x} + 9xe^{-2x} +$ $\left(\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2\right)e^{-2x}$ |