Unidad 2 : Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

Tema 2.6 : Método de Variación de Parámetros

Parte A) **Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden**

La forma estándar de la EDL No-Homogénea que queremos resolver es:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

1) Se resuelve primero la EDLH asociada a la EDLNH original, para determinar la solución homogénea: $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

2) Se supone que la solución particular de la EDLNH asociada se puede obtener a partir de la solución de la EDLH variando los parámetros, esto es suponiendo que: $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$

3) Sustituyendo esta última ecuación en la EDLNH original, con el propósito de obtener las funciones desconocidas $u_1(x)$ y $u_2(x)$, obtenemos después de rearreglar términos, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

4) Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas mediante la Regla de Cramer, o Método de Determinantes, obtenemos:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{W_1}{W} = \frac{-f\ y_2}{W} \quad ; \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{W_2}{W} = \frac{f\ y_1}{W}$$

5) Integramos estas dos ecuaciones para obtener $u_1(x)$ y $u_2(x)$, y las sustituimos en la ecuación propuesta para y_p en el paso número 2, le sumamos la solución y_h del paso número 1, y así obtenemos la solución total del problema: $y = y_h + y_p$

Parte B) **Ecuaciones Diferenciales Lineales de 3er Orden**

La forma estándar de la EDL No-Homogénea que queremos resolver es:

$$y''' + P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x)$$

1) Se resuelve primero la EDLH asociada a la EDLNH original, para determinar la solución homogénea: $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$

2) Se supone que la solución particular de la EDLNH asociada se puede obtener a partir de la solución de la EDLH variando los parámetros , esto es suponiendo que: $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + u_3(x)y_3(x)$

3) Sustituyendo esta última ecuación en la EDLNH original, con el propósito de obtener las funciones desconocidas $u_1(x)$, $u_2(x)$ y $u_3(x)$, obtenemos después de rearreglar términos, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3 &= 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_3'y_3' &= 0 \\ u_1'y_1'' + u_2'y_2'' + u_3'y_3'' &= f(x) \end{aligned}$$

4) Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas mediante la Regla de Cramer, o Método de Determinantes, obtenemos:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}; \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f & y_3'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}; \quad u_3' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}$$

5) Integramos estas tres ecuaciones para obtener $u_1(x)$, $u_2(x)$ y $u_3(x)$ y las sustituimos en la ecuación propuesta para y_p en el paso número 2, le sumamos la solución y_h del paso número 1, y así obtenemos la solución total del problema: $y = y_h + y_p$

<u>Ejemplos para la clase:</u> $E1: \quad y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ $E2: \quad y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$ $E3: \quad y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1+e^x}$ $E4: \quad y'' + 3y' + 2y = sen\left(e^x\right)$	$R1: \quad y = c_1e^x + c_2xe^x - \dfrac{1}{2}e^x \ln\left(1+x^2\right)$ $\qquad + xe^x \tan^{-1} x$ $R2: \quad y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\left(1+e^x\right)$ $R3: \quad y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \left(e^x + e^{2x}\right)\ln\left(1+e^x\right)$ $R4: \quad y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} - e^{-2x}sen\left(e^x\right)$

<u>Para la próxima clase estudiar las secciones:</u>

4.6 Zill 4.9 y 6.4 Nagle Método de Variación de Parámetros
4.6 Zill 4.9 y 6.4 Nagle Modelación con Ecuaciones de 2º Orden

<u>Tarea para entregar la próxima clase:</u>

Tarea No. 16 : Método de Variación de Parámetros

Ma-841 : ECUACIONES DIFERENCIALES **Tarea No. 16 : Método de Variación de Parámetros**		
Encuentre la solución general de las siguientes EDL No Homogéneas.		
	Ecuación Diferencial	Solución
1	$y'' + y = \sec x$	$y = c_1 \cos x + c_2 senx$ $+ xsenx + \cos x \ln(\cos x)$
2	$y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1+e^x}$	$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (1+e^x)e^x \ln(1+e^x)$
3	$y'' + 3y' + 2y = sen(e^x)$	$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - e^{-2x} sen(e^x)$
4	$y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$	$y = c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x} +$ $\frac{1}{2}x^2 e^{-x} \ln x - \frac{3}{4}x^2 e^{-x}$
5	$y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x$	$y = c_1 e^x senx + c_2 e^x \cos x +$ $xe^x senx + e^x \cos x \ln\lvert\cos x\rvert$
6	$4y'' - y = xe^{x/2}$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = \frac{3}{4}e^{x/2} + \frac{1}{4}e^{-x/2} + \frac{1}{8}x^2 e^{x/2} - \frac{1}{4}xe^{x/2}$

MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS			
Ecuación Lineal de Premier Orden $y' + P(x)y = h(x)$ $y' + P(x)y = 0$ $y_h = cv(x)$	$y = u(x)v(x)$ $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$	$u(x) = \int \frac{h(x)}{v(x)}dx + c$	$\underline{\underline{y = v(x)\left[\int \frac{h(x)}{v(x)}dx + c\right]}}$
Fórmula de la Segunda Solución $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ $y = c_1 y_1(x)$	$y_2(x) = u(x)y_1(x)$ $u(x) = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx$	$\underline{\underline{y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx}}$	$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$
Solución Particular de la Ecuación Lineal No Homogénea de 2º Orden $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$	$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$	$\underline{\underline{u_1' = \frac{-f\ y_2}{W}}}$; $\underline{\underline{u_2' = \frac{f\ y_1}{W}}}$	$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ $y = y_h + y_p$