

Unidad 2 : Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

Tema 2.7 : Modelación con Ecuaciones de 2º Orden

Ejemplos para la clase:

Ejemplo 1: Un contrapeso de 20 lb estira 6 pulg a un resorte. En ese sistema, el contrapeso se suelta, partiendo del reposo, a 6 pulgadas abajo de la posición de equilibrio.

(a) Calcule la posición del contrapeso cuando $t = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ y $\frac{9\pi}{32}$ segundos.

(b) ¿Cuál es la velocidad del contrapeso cuando $t = \frac{3\pi}{16}$ s? ¿Hacia donde se dirige el contrapeso en ese instante?

(c) ¿Cuándo pasa el contrapeso por la posición de equilibrio?

Ejemplo 2: Una masa de 1 kg está unida a un resorte cuya constante es 16 N/m y todo el sistema se sumerge en un líquido que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 10 veces la velocidad instantánea. Formule las ecuaciones del movimiento si:

(a) El contrapeso se suelta, partiendo del reposo a 1 m abajo de la posición de equilibrio.

(b) El contrapeso se suelta a 1 m abajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 12 m/s hacia arriba.

Ejemplo 3: Cuando una masa de 1 slug se cuelga de un resorte, lo estira 2 pies, y llega al reposo en su posición de equilibrio. A partir de $t=0$, se aplica una fuerza externa al sistema, igual a $f(t) = 8\text{sen}4t$. Formule la ecuación del movimiento si el medio presenta una fuerza amortiguadora numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.

Ejemplo 4: Determine la carga en el capacitor y la corriente en el circuito en serie RLC si $L=5/3$ h, $R=10$ ohms, $C=1/30$ f, $E(t)=300$ V, $q(0)=0$ C, $i(0)=0$ A. Calcule la carga máxima en el capacitor.

Ejemplo 5: Calcule la corriente de estado estable en un circuito en serie RLC, si $L=1/2$ h, $R=20$ ohms, $C=0.001$ f, y $E(t)=100 \text{sen}60t$ V.

$$R1: x\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{4}; \quad x\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}; \quad x\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}; \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; \quad x\left(\frac{9\pi}{32}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(b) \quad 4 \text{ pies/s hacia abajo} \quad ; \quad (c) \quad t = \frac{(2n+1)\pi}{16}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$R2: (a) \quad x(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t} \quad ; \quad (b) \quad x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-8t}$$

$$R3: \quad x(t) = \frac{1}{4}e^{-4t} + te^{-4t} - \frac{1}{4}\cos 4t$$

$$R4: \quad q(t) = 10 - 10e^{-3t}(\cos 3t + \text{sen} 3t)$$

$$i(t) = 60e^{-3t}\text{sen} 3t \quad ; \quad 10.432 C$$

$$R5: \quad i_p(t) = 4.160\text{sen}(60t - 0.588)$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

5.1 Zill	4.11 y 4.12 Nagle	Modelación con Ecuaciones de 2º Orden
6.1 Zill	8.1 y 8.2 Nagle	Método de Series de Potencias

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 17 : Modelación con Ecuaciones de 2º Orden

Ma-841 Ecuaciones Diferenciales

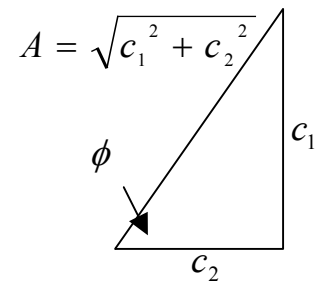
Tarea No. 17 : Modelación con Ecuaciones de 2° Orden

P1: Al fijar un contrapeso de 24 lb al extremo de un resorte, que cuelga verticalmente, lo estira 4 pulg. Deduzca la ecuación del movimiento cuando el contrapeso se suelta y parte del reposo desde un punto que está 3 pulg arriba de la posición de equilibrio.

P2: Un contrapeso de 8 lb, fijo a un resorte, tiene un movimiento armónico simple. Deduzca la ecuación del movimiento si la constante del resorte es 1 lb/pie y el contrapeso parte de 6 pulg abajo del punto de equilibrio, con una velocidad de 3/2 pie/s hacia abajo. Exprese la solución en la forma de la ecuación $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. Nota:

Utilice la identidad: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$, y el cambio de variable mostrado en la figura en la solución

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$



P3: Un contrapeso de 4 lb se une a un resorte cuya constante es 2 lb/pie. El medio presenta una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si el contrapeso se suelta de un punto a 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad de 8 pie/s hacia abajo, calcule el tiempo en que pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el momento en que el contrapeso llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio, ¿Cuál es su posición en ese instante?

P4: Una fuerza de 2 lb estira 1 pie un resorte. A ese resorte se le une un contrapeso de 3.2 lb y el sistema se sumerge en un medio que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 0.4 la velocidad instantánea. (a) Deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso parte del reposo 1 pie arriba de la posición de equilibrio.

(b) Exprese la ecuación del movimiento en la forma: $x(t) = Ae^{\alpha t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

(c) Calcule el primer momento en que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio dirigiéndose hacia arriba.

P5: Un contrapeso de 16 lb estira 8/3 pie un resorte. Al principio, el contrapeso parte del reposo a 2 pies debajo de la posición de equilibrio y el movimiento ocurre un medio que presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la mitad de la velocidad instantánea. Deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso está impulsado por una fuerza externa igual a $f(t) = 10 \cos 3t$.

P6: Cuando una masa de 2 kg se cuelga de un resorte cuya constante es 32 N/m, llega a la posición de equilibrio. A partir de $t=0$ se aplica al sistema una fuerza igual a $f(t) = 68e^{-2t} \cos 4t$. Deduzca la ecuación del movimiento cuando no hay amortiguamiento.

P7: Determine la carga y la corriente de estado estable en un circuito en serie RLC cuando $L=1$ h, $R=2$ ohms, $C=0.25$ f, y $E(t)=50 \cos(t)$ V.

P8: Calcule la carga en el capacitor de un circuito RLC cuando $L=1/2$ h, $R=10$ ohms, $C=0.01$ f, $E(t)=150$ V, $q(0)=1$ C e $i(0)=0$ A. ¿Cuál es la carga en el capacitor cuando ha transcurrido mucho tiempo?

$$R1: x(t) = -\frac{1}{4} \cos(4\sqrt{6}t)$$

$$R2: x(t) = \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{4} \text{sen} 2t \quad ; \quad x(t) = \frac{\sqrt{13}}{4} \text{sen}(2t + 0.5880)$$

$$R3: 1/4 \text{ s}; \quad 1/2 \text{ s}; \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2} = 0.14$$

$$R4: x(t) = e^{-2t} \left(-\cos 4t - \frac{1}{2} \text{sen} 4t \right); \quad x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-2t} \text{sen}(4t + 4.249); \quad t = 1.294 \text{ s}$$

$$R5: x(t) = e^{-t/2} \left(-\frac{4}{3} \cos \frac{\sqrt{47}}{2} t - \frac{64}{3\sqrt{47}} \text{sen} \frac{\sqrt{47}}{2} t \right) + \frac{10}{3} (\cos 3t + \text{sen} 3t)$$

$$R6: x(t) = -\frac{1}{2} \cos 4t + \frac{9}{4} \text{sen} 4t + \frac{1}{2} e^{-2t} \cos 4t - 2e^{-2t} \text{sen} 4t$$

$$R7: q_p = \frac{100}{13} \text{sen} t + \frac{150}{13} \cos t \quad ; \quad i_p = \frac{100}{13} \cos t - \frac{150}{13} \text{sen} t$$

$$R8: q(t) = -\frac{1}{2} e^{-10t} (\cos 10t + \text{sen} 10t) + \frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{3}{2} \text{ C}$$