Unidad 3 : Método de Series para Ecuaciones Lineales

Tema 3.1 : Repaso de Series de Taylor

- La situación que deseamos considerar es el problema de determinar los coeficientes a_k que nos permitan representar una función continua $f(x)$ en una serie infinita de potencias de la variable x :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \ldots$$

$$f(x)=a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \ldots$$

$$f(0)=a_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(0)=0!a_0}}$$

$$f'(x)=a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + 7a_7 x^6 + 8a_8 x^7 + \ldots$$

$$f'(0)=a_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f'(0)=1!a_1}}$$

$$f''(x)=2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 + 4\cdot 5a_5 x^3 + 5\cdot 6a_6 x^4 + 6\cdot 7a_7 x^5 + \ldots$$

$$f''(0)=2a_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f''(0)=2!a_2}}$$

$$f'''(x)=2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4 x + 3\cdot 4\cdot 5a_5 x^2 + 4\cdot 5\cdot 6a_6 x^3 + 5\cdot 6\cdot 7a_7 x^4 + \ldots$$

$$f'''(0)=2\cdot 3a_3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f'''(0)=3!a_3}}$$

$$f^{(4)}(x)=2\cdot 3\cdot 4a_4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5 x + 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6a_6 x^2 + 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7a_7 x^3 + \ldots$$

$$f^{(4)}(0)=2\cdot 3\cdot 4a_4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f^{(4)}(0)=4!a_4}}$$

continuando de la misma forma encontramos que :

$$f^{(n)}(0)=n!\cdot a_n \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}} \quad \textit{fórmula de Maclaurin}$$

• Si quisiéramos considerar el desarrollo de una función con respecto a cualquier otro punto diferente de cero, $x_0 \neq 0$, procediendo de manera semejante obtendríamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \ldots$$

$$los\ coeficientes\ los\ podriamos\ calcular\ como: \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Esta es la fórmula de los coeficientes de la serie de Taylor de $f(x)$ con respecto al punto $x_0 \neq 0$

• **Ejemplo:** Desarrolle la función f(x) = e^{2x} con respecto al punto x_0=1; calculando los coeficientes utilizando una tabla:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	n!	a_n
0	e^{2x}	e^2	1	e^2
1	$2\,e^{2x}$	$2\,e^2$	1	$2\,e^2$
2	$2^2\,e^{2x}$	$2^2\,e^2$	2!	$2^2\,e^2/2!$
3	$2^3\,e^{2x}$	$2^3\,e^2$	3!	$2^3\,e^2/3!$
4	$2^4\,e^{2x}$	$2^4\,e^2$	4!	$2^4\,e^2/4!$
5	$2^5\,e^{2x}$	$2^5\,e^2$	5!	$2^5\,e^2/5!$
6	$2^6\,e^{2x}$	$2^6\,e^2$	6!	$2^6\,e^2/6!$
n	$2^n\,e^{2x}$	$2^n\,e^2$	n!	$2^n\,e^2/n!$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4 + a_5(x-1)^5 + \cdots$$

$$f(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + \frac{2^2 e^2}{2!}(x-1)^2 + \frac{2^3 e^2}{3!}(x-1)^3 + \frac{2^4 e^2}{4!}(x-1)^4 + \cdots$$

$$\Rightarrow f(x) = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{n!}$$

Desarrollo en series, con respecto a $x_0 = 0$, de las funciones que conviene conocer debido a su ocurrencia frecuente:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$senh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

6.1 Zill 8.1 y 8.2 Nagle Método de Series para ED de 1er Orden

Tarea para entregar la próxima clase:

No hay tarea para entregar la próxima clase

Dos operaciones básicas con los índices de las sumatorias		
Dejando todos los términos dentro de la sumatoria	$\underbrace{c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \ldots}_{dentro\quad de\quad la\quad sumatoria}$	$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n x^n$
Sacando un término de la sumatoria	$c_0 + \underbrace{c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \ldots}_{dentro\quad de\quad la\quad sumatoria}$	$c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^n$
Sacando dos términos de la sumatoria	$c_0 + c_1x + \underbrace{c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \ldots}_{dentro\quad de\quad la\quad sumatoria}$	$c_0 + c_1x + \sum_{n=2}^{n=\infty} c_n x^n$
Sacando tres términos de la sumatoria	$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \underbrace{c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \ldots}_{dentro\quad de\quad la\quad sumatoria}$	$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \sum_{n=3}^{n=\infty} c_n x^n$
Con el cambio de variable $n = k$	$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \ldots$	$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^k$
Con el cambio de variable $n = k - 1$ $k = n + 1$	$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \ldots$	$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n x^n = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_{k-1} x^{k-1}$
Con el cambio de variable $n = k - 2$ $k = n + 2$	$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \ldots$	$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n x^n = \sum_{k=2}^{k=\infty} c_{k-2} x^{k-2}$
Con el cambio de variable $n = k - 3$ $k = n + 3$	$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \ldots$	$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n x^n = \sum_{k=3}^{k=\infty} c_{k-3} x^{k-3}$