

Unidad 2: Método de Series para Ecuaciones Lineales

Tema 3.3 : Método de Series para ED Homogéneas de 2º Orden

Función Analítica: $f(x)$ es una función analítica en un punto x_0 si puede representarse como una serie de potencias de $(x-x_0)$, esto es, si:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Ecuación Diferencial Lineal de 2o Orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad ; \quad \text{EDLH de 2o Orden} \quad ; \quad (1)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad ; \quad \text{Forma Es tan dar} \quad ; \quad (2)$$

Punto Ordinario: Se dice que un punto x_0 en un Punto Ordinario de la ecuación (1) si $P(x)$ y $Q(x)$ son ambas funciones analíticas en x_0 .

Punto Singular: Se dice que x_0 es un Punto Singular de la ecuación (1) si no es un Punto Ordinario, esto es, si alguna de las dos funciones $P(x)$ ó $Q(x)$ no es analítica en x_0 .

Punto Singular Regular: Se dice que un Punto Singular x_0 de la ecuación (1) es un Punto Singular Regular si ambas funciones $(x-x_0)P(x)$ y $(x-x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0 .

Punto Singular Irregular: Se dice que un Punto Singular x_0 de la ecuación (1) es un Punto Singular Irregular si no es un Punto Singular Regular, esto es, si alguna de las funciones $(x-x_0)P(x)$ ó $(x-x_0)^2Q(x)$ no son analíticas en x_0 .

Método de Series en Puntos Ordinarios, con respecto al PO $x_0=0$: consiste en suponer que la solución tiene la forma: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, sustituir esta ecuación en la ED, de ahí obtener una fórmula de recurrencia, y de ahí obtener unos 4 o 5 términos para cada una de las dos soluciones y_1, y_2 .

Método de Frobenius para Puntos Singulares Regulares, con respecto al PSR

$x_0=0$: consiste en suponer que la solución tiene la forma: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, sustituir en la

ED, de ahí obtener una ecuación algebraica de segundo orden para la variable r , con soluciones r_1 y r_2 , llamada ecuación indicial, y también la fórmula de recurrencia, que va a quedar en función del parámetro r , obteniendo entonces una fórmula para r_1 y otra para r_2 , las cuales van a generar las dos soluciones y_1 y y_2 .

Ejemplo:

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0$$

$$\begin{array}{cccc} n = k & n - 2 = k & n = k & n = k \\ k = n & n = k + 2 & k = n & k = n \end{array}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 4k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k = 0$$

$$(-2c_2 + 2c_0) + (-6c_3 + 4c_1 + 2c_1)x + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} 4k c_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} 2c_k x^k = 0$$

$$(-2c_2 + 2c_0) + (-6c_3 + 4c_1 + 2c_1)x + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1) c_k - (k+2)(k+1) c_{k+2} + 4k c_k + 2c_k] x^k = 0$$

$$(-2c_2 + 2c_0) = 0 \Rightarrow c_2 = c_0 \quad ; \quad (-6c_3 + 4c_1 + 2c_1) = 0 \Rightarrow c_3 = c_1$$

$$[k(k-1) c_k - (k+2)(k+1) c_{k+2} + 4k c_k + 2c_k] = 0 \quad ;$$

$$(k+2)(k+1) c_{k+2} = k(k-1) c_k + 4k c_k + 2c_k \Rightarrow (k+2)(k+1) c_{k+2} = (k^2 + 3k + 2) c_k$$

$$(k+2)(k+1) c_{k+2} = (k+2)(k+1) c_k \Rightarrow c_{k+2} = c_k \quad ; \quad k \geq 2$$

$c_2 = c_0 \quad y \quad c_3 = c_1$ $c_{k+2} = c_k \quad ; \quad k \geq 2$ $k = 2 \quad ; \quad c_4 = c_2 = c_0$ $k = 3 \quad ; \quad c_5 = c_3 = c_1$ $k = 4 \quad ; \quad c_6 = c_4 = c_0$	$k = 5 \quad ; \quad c_7 = c_5 = c_1$ $k = 6 \quad ; \quad c_8 = c_6 = c_0$ $k = 7 \quad ; \quad c_9 = c_7 = c_1$ $k = 8 \quad ; \quad c_{10} = c_8 = c_0$ $k = 9 \quad ; \quad c_{11} = c_9 = c_1$
$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 + c_9 x^9 + \dots$ $y = c_0 + c_1 x + c_0 x^2 + c_1 x^3 + c_0 x^4 + c_1 x^5 + c_0 x^6 + c_1 x^7 + c_0 x^8 + c_1 x^9 + c_0 x^{10} + \dots$ $y = c_0 \underbrace{[1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \dots]}_{y_1(x)} + c_1 \underbrace{[x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + \dots]}_{y_2(x)}$ $y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} \quad ; \quad y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \quad ; \quad y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$	
<p><u>Ejemplos para la clase:</u></p> <p>E1: $y'' - 2xy' + y = 0$</p> <p>E2: $y'' - (x+1)y = 0$</p> <p>E3: $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ $y(0) = -2 \quad ; \quad y'(0) = 6$</p>	<p>R1: $y_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{21x^6}{6!} - \dots$</p> <p>$y_2 = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{5x^5}{5!} + \frac{45x^7}{7!} + \dots$</p> <p>R2: $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{30} + \dots$</p> <p>$y_2 = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} + \dots$</p> <p>R3: $y(x) = -2 \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right] + 6x$</p> <p>$y(x) = 8x - 2e^x$</p>
<p><u>Para la próxima clase estudiar las secciones:</u> 6.1 Zill 8.1 y 8.2 Nagle Método de Series de Potencias</p> <p><u>Tarea para entregar la próxima clase:</u> Tarea No. 19 : Método de Series para EDL Homogéneas de 2º Orden</p>	

Ejemplo de una fórmula de recurrencia de tres términos:

$$y'' - (x+1)y' - y = 0 \quad ; \quad y'' - xy' - y' - y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\begin{array}{cccc} n-2=k & n=k & n-1=k & n=k \\ n=k+2 & & n=k+1 & \end{array}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\underbrace{(2c_2 - c_1 - c_0)}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{[(k+2)(k+1) c_{k+2} - k c_k - (k+1) c_{k+1} - c_k]}_{=0} x^k = 0$$

$$(2c_2 - c_1 - c_0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{2}}}$$

$$[(k+2)(k+1) c_{k+2} - k c_k - (k+1) c_{k+1} - c_k] = 0$$

$$(k+2)(k+1) c_{k+2} = k c_k + (k+1) c_{k+1} + c_k$$

$$(k+2)(k+1) c_{k+2} = (k+1) c_k + (k+1) c_{k+1}$$

$$(k+2)(k+1) c_{k+2} = (k+1)(c_k + c_{k+1})$$

$$(k+2) c_{k+2} = c_k + c_{k+1} \quad ; \quad k \geq 1$$

$$\underline{\underline{c_{k+2} = \frac{c_k + c_{k+1}}{(k+2)}}} \quad ; \quad k \geq 1$$

$$c_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{2} \quad ; \quad c_{k+2} = \frac{c_k + c_{k+1}}{(k+2)}$$

$$k=1; \quad c_3 = \frac{c_1 + c_2}{3} = \frac{c_1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{2} \right) = \frac{c_1}{3} + \frac{c_1}{6} + \frac{c_0}{6} = \underline{\underline{\frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{6}}}$$

$$k=2; \quad c_4 = \frac{c_2 + c_3}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{6} \right) = \frac{c_1}{8} + \frac{c_0}{8} + \frac{c_1}{8} + \frac{c_0}{24} = \underline{\underline{\frac{c_1}{4} + \frac{c_0}{6}}}$$

$$k=3; \quad c_5 = \frac{c_3 + c_4}{5} = \frac{1}{5} \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{6} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{c_1}{4} + \frac{c_0}{6} \right) = \frac{c_1}{10} + \frac{c_1}{20} + \frac{c_0}{30} + \frac{c_0}{6} = \underline{\underline{\frac{3c_1}{20} + \frac{c_0}{5}}}$$

$$k=4; \quad c_6 = \frac{c_4 + c_5}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{c_1}{4} + \frac{c_0}{6} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{3c_1}{20} + \frac{c_0}{5} \right) = \frac{c_1}{24} + \frac{3c_1}{120} + \frac{c_0}{36} + \frac{c_0}{30} = \underline{\underline{\frac{c_1}{15} + \frac{11c_0}{180}}}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + \dots$$

$$y = c_0 + c_1 x + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{2} \right) x^2 + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{6} \right) x^3 + \left(\frac{c_1}{4} + \frac{c_0}{6} \right) x^4 + \left(\frac{3c_1}{20} + \frac{c_0}{5} \right) x^5 + \dots$$

$$y = c_0 \underbrace{\left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{5} + \dots \right]}_{y_1(x)} + c_1 \underbrace{\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{3x^5}{20} + \dots \right]}_{y_2(x)}$$

Ma-841 : ECUACIONES DIFERENCIALES

Tarea No. 19 : Método de Series para EDL Homogéneas de 2º orden

Utilice el Método de Series en puntos ordinarios para resolver las ED's:

	Ejercicio	Respuesta
1	$y'' + x^2 y' + xy = 0$	$y = c_0 \left[1 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{4^2}{6!} x^6 - \frac{7^2 \cdot 4^2}{9!} x^9 + \dots \right]$ $+ c_1 \left[x - \frac{2^2}{4!} x^4 + \frac{5^2 \cdot 2^2}{7!} x^7 - \frac{8^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2}{10!} x^{10} + \dots \right]$
2	$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$	$y = c_0 [1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots]$ $+ c_1 [x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \dots]$
3	$y'' - (x+1)y' - y = 0$	$y = c_0 \left[1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \dots \right]$ $+ c_1 \left[x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \dots \right]$
4	$(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$	$y = c_0 \left[1 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{7}{4 \cdot 4!} x^4 + \frac{23 \cdot 7}{8 \cdot 6!} x^6 - \dots \right]$ $+ c_1 \left[x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{14}{2 \cdot 5!} x^5 - \frac{34 \cdot 14}{4 \cdot 7!} x^7 - \dots \right]$
5	$y'' - 2xy' + 8y = 0$ $y(0) = 3; \quad y'(0) = 0$	$y = 3 - 12x^2 + 4x^4$