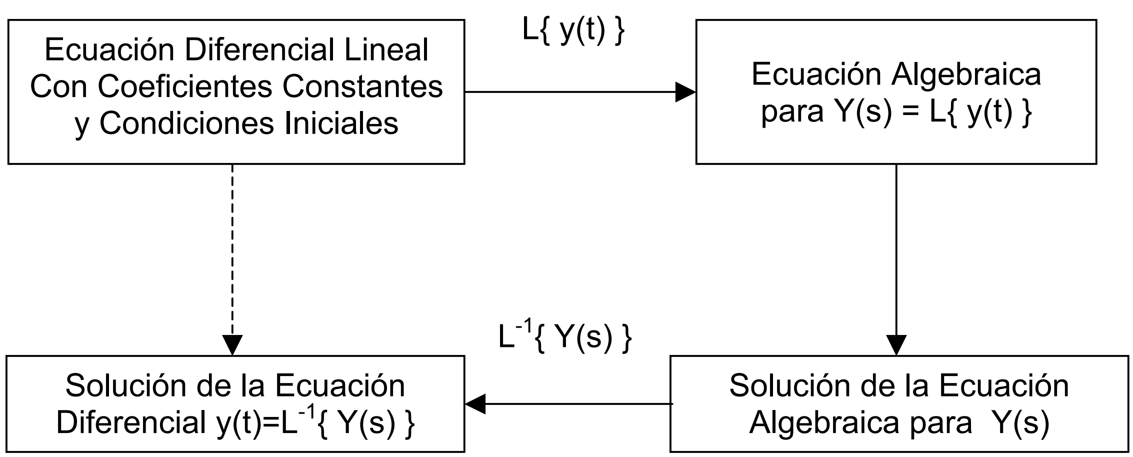
Unidad 4: Método de la Transformada de Laplace

Tema 4.1 : Definición de la Transformada de Laplace



Transformación de funciones f(t) a funciones F(s)	$t^n \rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$ $e^{at} \rightarrow \frac{1}{s-a}$ $\cos(bt) \rightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$ $e^{at} sen(bt) \rightarrow \frac{b}{(s-a)^2+a^2}$
Transformación de operaciones de derivar, de integrar, de multiplicar por t, dividir por t, etc.	$f(t) \rightarrow F(s)$ $f'(t) \rightarrow sF(s)-f(0)$ $\int_o^t f(u)du \rightarrow \frac{F(s)}{s}$ $t \cdot f(t) \rightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$ $\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_0^s F(\sigma)d\sigma$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	f(t)	F(s)		f(t)	F(s)
1	$f(t)$	$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	15	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
2	1	$\frac{1}{s}$	16	$t^n \cdot f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)]$
3	t	$\frac{1}{s^2}$	17	$t \cdot sen(bt)$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	18	$t \cdot \cos(bt)$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	19	$U(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
6	$sen(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	20	$f(t-a)\cdot U(t-a)$	$e^{-as}\cdot F(s)$
7	$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	21	$f'(t)$	$s\cdot F(s)-f(0)$
8	$senh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$	22	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)$ $-f'(0)$
9	$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$	23	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots$ $-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
10	$e^{at}\cdot f(t)$	$F(s-a)$	24	$f(t)*g(t)$	$F(s)\cdot G(s)$
11	$e^{at}\cdot sen(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	25	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}\cdot F(s)$
12	$e^{at}\cdot\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	26	$f_T(t)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\cdot\int_0^T f(t)e^{-st}dt$
13	$e^{at}\cdot senh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	27	$\delta(t-a)$	e^{-as}
14	$e^{at}\cdot\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$	28	$\delta(t)$	1

Ejemplos de Cálculo de Transformadas de Laplace
a partir de la definición:

Cálculo de la Transformada de la función $f(t)=t^n$

$$L\{f(t)\}=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$L\{1\}=\int_0^\infty 1\cdot e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty=\frac{-1}{s}(0-1)=\frac{1}{s}$$

$$L\{t\}=\int_0^\infty t\cdot e^{-st}dt=\left.\frac{-te^{-st}}{-s}\right|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{-1}{s}e^{-st}dt=0+\frac{1}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}dt}_{L\{1\}}=\frac{1}{s^2}$$

$$L\{t^2\}=\int_0^\infty t^2\cdot e^{-st}dt=\left.\frac{-t^2e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{-2t}{s}e^{-st}dt=0+\frac{2}{s}\underbrace{\int_0^\infty te^{-st}dt}_{L\{t\}}=\frac{2}{s^3}$$

$$L\{t^3\}=\int_0^\infty t^3\cdot e^{-st}dt=\left.\frac{-t^3e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{-3t^2}{s}e^{-st}dt=0+\frac{3}{s}\underbrace{\int_0^\infty t^2e^{-st}dt}_{L\{t^2\}}=\frac{3!}{s^4}$$

$$L\{t^4\}=\int_0^\infty t^4\cdot e^{-st}dt=\left.\frac{-t^4e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{-4t^3}{s}e^{-st}dt=0+\frac{4}{s}\underbrace{\int_0^\infty t^3e^{-st}dt}_{L\{t^3\}}=\frac{4!}{s^5}$$

$$\underline{\underline{L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}}}$$

Cálculo de la Transformada de la función exponencial $f(t)=e^{at}$

$$L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{at}\cdot e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^\infty=\frac{-1}{(s-a)}\left[e^{-\infty}-e^0\right]=\frac{1}{s-a}$$

$$\underline{\underline{L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}}}$$

Cálculo de la Transformada de la función coseno $f(t)=\cos(bt)$

$$L\{f(t)\}=F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$L\{\cos(t)\}=\int_0^{\infty} \underbrace{\cos(bt)}_{u}\underbrace{e^{-st}dt}_{dv}=-\left.\frac{\cos(bt)e^{-st}}{s}\right|_0^{\infty}-\frac{b}{s}\int_0^{\infty} \underbrace{\sin(bt)}_{u}\underbrace{e^{-st}dt}_{dv}$$

$$L\{\cos(t)\}=\left(0+\frac{1}{s}\right)-\frac{b}{s}\left[-\left.\frac{\sin(bt)e^{-st}}{s}\right|_0^{\infty}+\frac{b}{s}\underbrace{\int_0^{\infty} \cos(bt)e^{-st}dt}_{L\{\cos(bt)\}}\right]$$

$$L\{\cos(t)\}=\frac{1}{s}-\frac{b^2}{s^2}L\{\cos(t)\} \quad \Rightarrow \quad L\{\cos(t)\}+\frac{b^2}{s^2}L\{\cos(t)\}=\frac{1}{s}$$

$$L\{\cos(t)\}\left(1+\frac{b^2}{s^2}\right)=\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad L\{\cos(t)\}\left(\frac{s^2+b^2}{s^2}\right)=\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad L\{\cos(t)\}=\frac{s}{s^2+b^2}$$

Cálculo de la Transformada de la función $f(t)=\begin{cases} t & ; \quad 0<t<1 \\ 1 & ; \quad 1<t<2 \\ 0 & ; \quad 2<t<\infty \end{cases}$

$$L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_0^{1} \underbrace{t}_{u}\underbrace{e^{-st}dt}_{dv}+\int_1^{2} 1e^{-st}dt+\int_2^{\infty} 0e^{-st}dt$$

$$L\{f(t)\}=-\left.\frac{te^{-st}}{s}\right|_0^{1}-\int_0^{1} \frac{-1}{s}e^{-st}dt+\int_1^{2} 1e^{-st}dt+0$$

$$L\{f(t)\}=\left[-\frac{e^{-s}}{s}+0\right]+\frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{1}+\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^{2}=$$

$$L\{f(t)\}=-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{1}{s}\left[\frac{e^{-s}}{-s}-\frac{1}{-s}\right]+\left[\frac{e^{-2s}}{-s}-\frac{e^{-s}}{-s}\right]$$

$$L\{f(t)\}=-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-s}}{s}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

7.1 Zill	7.2 Nagle	Definición de la Transformada de Laplace
7.2 Zill	7.4 Nagle	Transformada Inversa

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 21 : Definición de la Transformada de Laplace

Ma-841 : Ecuaciones Diferenciales

Tarea No. 21 : Definición de la Transformada de Laplace

A partir de la definición: $L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$, calcule la Transformada de Laplace de las siguientes funciones:

Problemas:

$$P1: \quad f(t) = \begin{cases} t\,, & 0 \le t < 1 \\ 1\,, & 1 \le t < \infty \end{cases}$$

$$P2: \quad f(t) = \begin{cases} 1-t\,, & 0 \le t < 1 \\ 0\,, & 1 \le t < \infty \end{cases}$$

$$P3: \quad f(t) = e^{-t} sent$$

$$P4: \quad f(t) = 4t - 10$$

$$P5: \quad f(t) = 1 + e^{4t}$$

$$P6: \quad senh(kt)$$

Respuestas:

$$R1: \quad \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$R2: \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$R3: \quad \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$R4: \quad \frac{4}{s^2} - \frac{10}{s}$$

$$R5: \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s-4}$$

$$R6: \quad \frac{k}{s^2 - k^2}$$

$$use\ senh(kt) = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$$