Unidad 4 : Método de la Transformada de Laplace

Tema 4.4 : Otros Teoremas de Transformadas

Derivada de una Transformada

$$f(t) \Rightarrow F(s)$$

$$t^n f(t) \Rightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Transformada de una Derivada

$$f(t) \Rightarrow F(s)$$

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0)$$

$$\ldots \; - s^2 f^{(n-3)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Definición de Convolución

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u) g(t-u)\, du =$$

$$= g(t) * f(t) = \int_0^t g(u) f(t-u)\, du$$

Teorema de Convolución

$$f(t) \Rightarrow F(s)$$

$$g(t) \Rightarrow G(s)$$

$$f(t) * g(t) \Rightarrow F(s) G(s)$$

Transformada de una Integral

$$f(t) \Rightarrow F(s)$$

$$\int_0^t f(u)\, du \Rightarrow \frac{1}{s} F(s)$$

Transformada de una Función Periódica

$$f_T(t) \Rightarrow \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st}\, dt$$

Ejemplos para la clase del Teorema de la Derivada de una Transformada:

$E1: \quad L\{t\,sen(3t)\}$

$E2: \quad L\{te^{-3t}\cos(4t)\}$

$E3: \quad L^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s-3}{s^2+16}\right)\right\}$

$R1: \quad \dfrac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}$

$R2: \quad \left(s^2+6s-7\right)/\left(s^2+6s+25\right)^2$

$R3: \quad \left(2\cos(4t) - e^{3t}\right)/t$

Definición de Convolución. La convolución de dos funciones $f(t)\ y\ g(t)$ Está definida como:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)\,du$$

La convolución es conmutativa, esto es:

$$f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$$

Teorema de Convolución:

Si $L\{f(t)\}=F(s)$ y $L\{g(t)\}=G(s)$

Entonces

$$L\{f(t)*g(t)\}=F(s)G(s)$$

o en forma inversa

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)*g(t)$$

Ejemplo 1. Cálculo de $t^3 * t^2$

$$t^3 * t^2=\int_0^t u^3(t-u)^2\,du=$$

$$=\int_0^t u^3\left(t^2-2tu+u^2\right)du=$$

$$=\int_0^t \left(u^3t^2-2tu^4+u^5\right)du=$$

$$=\left[\frac{u^4t^2}{4}-2\frac{tu^5}{5}+\frac{u^6}{6}\right]_0^t=\frac{t^6}{4}-\frac{2t^6}{5}+\frac{t^6}{6}$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)t^6=\left(\frac{15-24+10}{60}\right)t^6=$$

$$\therefore\quad t^3*t^2=\frac{t^6}{60}$$

Ejemplo 2. Cálculo de $e^{-2t}*e^{3t}$

$$e^{-2t}*e^{3t}=\int_0^t e^{-2u}e^{3(t-u)}\,du=$$

$$\int_0^t e^{-2u}e^{3t}e^{-3u}\,du=e^{3t}\int_0^t e^{-5u}\,du=$$

$$e^{3t}\left[\frac{e^{-5u}}{-5}\right]_0^t=\frac{-e^{3t}}{5}\left(e^{-5t}-1\right)=\frac{e^{3t}}{5}-\frac{e^{-2t}}{5}$$

$$\therefore\quad e^{-2t}*e^{3t}=\frac{e^{3t}}{5}-\frac{e^{-2t}}{5}$$

Ejemplo 3.

$$Calcular\ \ L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\}$$

$$\frac{1}{(s+2)(s-3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-3}$$

$$1=A(s-3)+B(s+2)$$

$$en\ s=-2\quad\Rightarrow\quad A=-1/5$$

$$en\ s=+3\quad\Rightarrow\quad B=+1/5$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\}=\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+2)}+\frac{1}{(s-3)}\right\}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\}=-\frac{1}{5}e^{-2t}+\frac{1}{5}e^{3t}$$

Ejemplo 4.

$$Calcular\ \ L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\cdot\frac{1}{(s-3)}\right\}$$

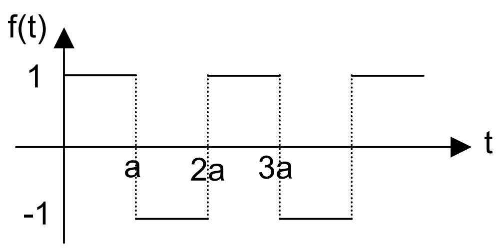
$$=e^{-2t}*e^{3t}=\frac{e^{3t}}{5}-\frac{e^{-2t}}{5}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\}=-\frac{1}{5}e^{-2t}+\frac{1}{5}e^{3t}$$

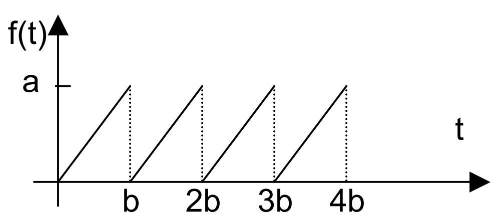
Ejemplos para la clase de la Definición de Convolución, el Teorema de Convolución, y del Teorema de la Transformada de una Integral

$E1: \quad t^3 * t^2$	$R1: \quad t^6/60$
$E2: \quad e^{2t} * e^{3t}$	$R2: \quad e^{3t} - e^{2t}$
$E3: \quad L\{e^{2t} * e^{3t}\}$	$R3: \quad 1/(s^2 - 5s + 6)$
$E4: \quad L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\right\}$	$R4: \quad e^{3t} - e^{2t}$
$E5: \quad L\left\{\int_0^t \cos u\,du\right\}$	$R5: \quad \dfrac{1}{s^2+1}$
$E6: \quad L\left\{\int_0^t ue^{t-u}\,du\right\}$	$R6: \quad \dfrac{1}{s^2(s-1)}$

Ejemplos para la clase del Teorema de la Transformada de una Función Periódica



$$\frac{(1-e^{-as})^2}{s(1-e^{-2as})} = \frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})}$$



$$\frac{a}{s}\left(\frac{1}{bs} - \frac{1}{e^{bs}-1}\right)$$

Unidad 4 : Método de la Transformada de Laplace

Demostración del Teorema de la Transformada de una Función Periódica

Si tenemos una función $f_T(t)$ que se repite periódicamente cada vez que t se incrementa en T unidades, decimos que $f_T(t)$ es una función periódica de período T, y se representa simbólicamente como: $f(t+nT)= f_T\ (T)$.

La transformada de Laplace de esta función la podemos calcular como:

$$\text{Si} \quad f_T(t) \quad \text{es} \quad \text{una función periódica con periodo } T \text{, esto es}:$$

$$f(t+nT) = f(t) \quad \text{para} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \cdots \quad \text{entonces}:$$

$$L\{f_T(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt + \int_T^{2T} f(t)\, e^{-st}\, dt + \int_{2T}^{3T} f(t)\, e^{-st}\, dt + \int_{3T}^{4T} f(t)\, e^{-st}\, dt + \ldots$$

$$u = t \qquad\qquad u = t - T \qquad\qquad u = t - 2T \qquad\qquad u = t - 3T$$

$$= \int_0^T f(u)\, e^{-su}\, du + \int_0^T f(u+T)\, e^{-s(u+T)}\, du + \int_0^T f(u+2T)\, e^{-s(u+2T)}\, du + \ldots$$

$$= \int_0^T f(u)\, e^{-su}\, du + e^{-sT}\int_0^T f(u)\, e^{-su}\, du + e^{-2sT}\int_0^T f(u)\, e^{-su}\, du + e^{-3sT}\int_0^T f(u)\, e^{-su}\, du + \ldots$$

$$= \left(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + e^{-4sT} + \ldots\right)\int_0^T f(u)\, e^{-su}\, du$$

$$= \left(1 + e^{-sT} + \left(e^{-sT}\right)^2 + \left(e^{-sT}\right)^3 + \left(e^{-sT}\right)^4 + \ldots\right)\int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-sT}}\int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt \quad \therefore$$

$$\underline{\underline{L\{f_T(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}\int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt}}$$

Ma-841 : Ecuaciones Diferenciales

Tarea No. 24 : Otros Teoremas de Transformadas

Resuelva los siguientes problemas

$P1: \quad L\{t\cos(2t)\}$	$R1: \quad (s^2-4)/(s^2+4)^2$
$P2: \quad L\{t^2 senh(t)\}$	$R2: \quad (6s^2+2)/(s^2-1)^3$
$P3: \quad L\{te^{2t} sen(6t)\}$	$R3: \quad (12s-24)/\left[(s-2)^2+36\right]$
$P4: \quad L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-3}{s+1}\right)\right\}$	$R4: \quad \frac{e^{-t}-e^{3t}}{t}$
$P5: \quad L\left\{\int_0^t e^{-u}\cos u\,du\right\}$	$R5: \quad \frac{s+1}{s\left[(s+1)^2+1\right]}$
$P6: \quad L\left\{\int_0^t ue^{t-u}\,du\right\}$	$R6: \quad \frac{1}{s^2(s-1)}$
$P7: \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$	$R7: \quad 1-e^{-t}$
$P8: \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\right\}$	$R8: \quad -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}$