Unidad 4 : Método de la Transformada de Laplace

Tema 4.6: La Función de Transferencia y el Enfoque de Sistemas

Un sistema lineal, como un circuito eléctrico RLC, un sistema mecánico bloque-resorte-amortiguador, un sistema hidráulico, etc., puede representarse o modelarse mediante una ecuación diferencial lineal de 2º orden, con coeficientes constantes, como la siguiente:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad ; \quad y(0) = k_1 \quad ; \quad y'(0) = k_2$$
$$\textit{con solución dada por}: \quad y = f(t)$$

Al resolver este problema de valor de inicial utilizando el Método de la Transformada de Laplace, obtenemos:

$$a\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + b\left(sY(s) - y(0)\right) + cY(s) = G(s)$$
$$a\left(s^2 Y(s) - sk_1 - k_2\right) + b\left(sY(s) - k_1\right) + cY(s) = G(s)$$
$$as^2 Y(s) + bY(s) + cY(s) - ask_1 - ak_2 - bk_1 = G(s)$$

Rearreglando los términos de esta ecuación al factorizar Y(s), y al despejar esta función obtenemos:

$$Y(s)[as^2 + bs + c] = [ask_1 + ak_2 + bk_1] + G(s)$$
$$Y(s) = \underbrace{\frac{[ask_1 + ak_2 + bk_1]}{[as^2 + bs + c]}}_{Y_h(s)} + \underbrace{\frac{G(s)}{[as^2 + bs + c]}}_{Y_p(s)}$$

en donde:

$$Y_h(s) = \textit{TL de la solución homogénea} \quad o \quad \textit{solución transitoria}$$
$$Y_p(s) = \textit{TL de la solución particular} \quad o \quad \textit{solución de estado estable}$$

$$\textit{Función de Transferencia} \quad H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$
$$\textit{Función Respuesta a un Impluslo} \quad h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$$
$$Y(s) = Y_h(s) + Y_p(s) = Y_h(s) + G(s)H(s)$$
$$y(t) = y_h(t) + g(t) * h(t) = y_h(t) + \int_0^t h(t - v)g(v)dv$$

Unidad 4 : Método de la Transformada de Laplace

Tema 4.6: La Función de Transferencia y el Enfoque de Sistemas

En el caso de que las condiciones iniciales sean ambas cero, $k_1 = k_2 = 0$, la solución homogénea o transitoria, será nula, y la solución total será la solución particular, o de estado estable, y tendremos que:

$$\textit{Ya que} \quad H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} \quad \textit{tenemos que}:$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{as^2 + bs + c} = \left[\frac{1}{as^2 + bs + c}\right] \cdot G(s) = H(s)G(s)$$

$$\textit{y obtenemos que}: \quad \underline{\underline{Y(s) = H(s) \cdot G(s)}}$$

$$\textit{o en palabras}: \quad Salida = Transferencia \cdot Entrada$$

$$\textit{o también como}: \mathrm{Re}spuesta = Transferencia \cdot Excitación$$

$$G(s) \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow Y(s)$$

Cuando a un sistema lineal se le aplica como excitación o señal de entrada un impulso unitario, la respuesta del sistema, o señal de salida, es precisamente la Función Respuesta a un Impulso, cuya Transformada de Laplace nos da la Función de Transferencia, la cual a su vez nos indica el valor de los elementos pasivos del sistema representados por las constantes a,b y c.

$$Si \quad \underline{\underline{g(t) = \delta(t)}} \quad entonces \quad G(s) = L\{\delta(t)\} = 1$$

$$\textit{y la respuesta del sistema será}:$$

$$Y(s) = H(s)G(s) = H(s) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y(t) = h(t)}}$$

Por lo tanto podemos determinar la Función de Transferencia, de “una caja negra” alimentándole un impulso unitario y sacándole Transformada de Laplace a la Función Respuesta a un Impulso que obtengamos a la salida del sistema.