Deducción de las Ecuaciones del Método de Runge-Kutta

El problema consiste en encontrar una solución numérica a la ecuación diferencial ordinaria de primer orden: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ sujeta a la condición inicial $y(x_0) = y_0$. El objetivo consiste en encontrar aproximaciones satisfactorias para los valores de la solución $y(x)$ en un conjunto especificado de valores de x denotados como $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots$. Los valores exactos los denotaremos como $y(x_1), y(x_2), y(x_3) \cdots$ y sus valores aproximados los denotaremos como $y_1, y_2, y_3, y_4 \cdots$

Empezamos aproximando el valor de y en el punto $x_1 = x_0 + \Delta x$, esto es, $y(x_1) = y_0 + \Delta y$. La manera mas simple de hacer esto consiste en aproximar Δy por la estimación acostumbrada para el verdadero incremento, o sea $\Delta y \cong dy = y'(x_0)\Delta x$. La ecuación diferencial misma nos da el valor de la derivada en el punto (x_0, y_0), esto es, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$; y entonces $\underline{\underline{\Delta y \cong f(x_0, y_0)\Delta x}}$ y por lo tanto

$y(x_1) = y_0 + \Delta y \cong y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x = y_1$

Una vez que y_1 ha sido obtenida como la aproximación a $y(x_1)$, el mismo procedimiento puede repetirse en (x_1, y_1) para obtener

$y(x_2) = y(x_1) + \Delta y \cong y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x = y_2$; y así sucesivamente hasta donde se necesite. Este método se conoce con el nombre de <u>“Método de Euler”</u>

Ahora bien, habiendo obtenido y_1 como una primera aproximación a $y(x_1)$ por el método de Euler, podemos usar ahora la ecuación diferencial para calcular y' en el nuevo punto $P_1 : (x_1, y_1)$ y usar entonces el promedio de las derivadas en los puntos $P_0 : (x_0, y_0)$ y $P_1 : (x_1, y_1)$ para obtener una mejor aproximación de Δy , y por tanto de $y(x_1)$ antes de calcular la siguiente aproximación $y(x_2)$. Este método nos da el valor $\underline{\underline{\Delta y \cong \frac{1}{2}[y'(x_0) + y'(x_1)]\Delta x}}$, y la estimación mejorada del siguiente punto es entonces: $y_0 + \Delta y \cong y_0 + \frac{1}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)]\Delta x = (y_1)_2$. Este proceso se conoce con el nombre de <u>“Método Modificado de Euler”</u>

Otra posibilidad adicional, después de haber obtenido y_1 como una primera aproximación a $y(x_1)$ por el método de Euler, consiste en reaproximar Δy y $y(x_1)$ usando la derivada en el punto medio de $P_0 : (x_0, y_0)$ y $P_1 : (x_1, y_1)$ en lugar de usar el promedio de las derivadas, esto es en el punto:

$M:\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2}\right)$. Esto nos da la estimación mejorada

$\Delta y \cong f\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2}\right)\Delta x = f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0+\frac{1}{2}f(x_0,y_0)\Delta x\right)\Delta x$, y esto nos da una tercera aproximación a $y(x_1)$ como: $(y_1)_3 = y_0 + f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0+\frac{1}{2}f(x_0,y_0)\Delta x\right)\Delta x$.

Este proceso se conoce con el nombre de “Método de Runge”

El método de Runge-Kutta es básicamente una generalización de esos tres procedimientos simples en el que en cada paso se calculan tres o mas estimaciones de Δy. El valor de Δy que se usa entonces para calcular el siguiente valor de y es una combinación lineal de esas estimaciones en la cual las constantes de combinación se escogen para hacer el error tan pequeño como sea posible.

En el método de Runge-Kutta de tercer orden se toman los siguientes tres estimados de Δy:

$(\Delta y)_1 = f(x_0,y_0)\Delta x$ que es la estimación del método de Euler;

$(\Delta y)_2 = f[x_0 + p\Delta x, y_0 + p(\Delta y)_1]\Delta x \quad ; \quad 0<p<1$; que es parecido al estimado del método de Runge excepto que en lugar de evaluar en el punto medio (con $p=\frac{1}{2}$) la derivada se calcula en un punto $P:[x_0 + p\Delta x, y_0 + p(\Delta y)_1]$, que todavía no se ha determinado; y

$(\Delta y)_3 = f[x_0 + q\Delta x, y_0 + r(\Delta y)_2 + (q-r)(\Delta y)_1]\Delta x \quad ; \quad 0<q\ ,\ r<1$ en donde q y r deben de calcularse. Finalmente el valor de Δy que se usa finalmente para calcular y_1 se toma como: $(\Delta y)_4 = a(\Delta y)_1 + b(\Delta y)_2 + c(\Delta y)_3$ en donde a,b,c son parámetros que igual que los parámetros p,q,r deben escogerse para dar la mas alta precisión al estimar Δy . Los detalles de este cálculo pueden consultarse en el libro “Advanced Engineering Mathematics” de C.R.Wylie; Third Edition, McGraw-Hill, 1966.
Dicho procedimiento nos lleva a un sistema de cuatro ecuaciones con seis incógnitas: $a+b+c=1 \quad ; \quad pb+qc=\frac{1}{2} \quad ; \quad p^2b+q^2c=\frac{1}{3} \quad ; \quad prc=\frac{1}{6}$ de donde pueden despejarse cuatro de los parámetros en función de los otros dos, obteniendo:

$$a=\frac{6pq-3(p+q)+2}{6pq} \quad ; \quad b=\frac{2-3q}{6p(p-q)} \quad ; \quad c=\frac{2-3p}{6q(q-p)} \quad ; \quad r=\frac{q(q-p)}{p(2-3p)}$$

Puesto que p y q son arbitrarias, tenemos entonces una familia de fórmulas biparámetricas que pueden usarse para resolver la ecuación diferencial de primer orden con una precisión del orden de $(\Delta x)^4$.

Dos casos especiales del "Método de Runge-Kutta de Tercer Orden" vale la pena anotar. Para listarlos usaremos la notación convencional:

$$\Delta x = h \quad ; \quad (\Delta y)_1 = k_1 \quad ; \quad (\Delta y)_2 = k_2 \quad ; \quad (\Delta y)_3 = k_3$$

CASO 1:

$$a = \frac{1}{4} \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = \frac{3}{4} \quad ; \quad p = \frac{1}{3} \quad ; \quad q = r = \frac{2}{3}$$

$$\Delta y \cong (\Delta y)_4 = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3)$$

$$k_1 = f(x_0, y_0)h$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{3}k_1\right)h$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

CASO 2:

$$a = \frac{1}{4} \quad ; \quad b = c = \frac{3}{8} \quad ; \quad p = q = r = \frac{2}{3}$$

$$\Delta y \cong (\Delta y)_4 = \frac{1}{8}(2k_1 + 3k_2 + 3k_3)$$

$$k_1 = f(x_0, y_0)h$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}k_1\right)h$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

La discusión anterior puede extenderse sin dificultad, (excepto los detalles), para llegar a procedimientos de solución en los cuales el error es del orden de $h^5 = (\Delta x)^5$ En particular los dos conjuntos de fórmulas siguientes son bastante útiles:

CASO 3:

$$\Delta y \cong (\Delta y)_5 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_0, y_0)h$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)h$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3)h$$

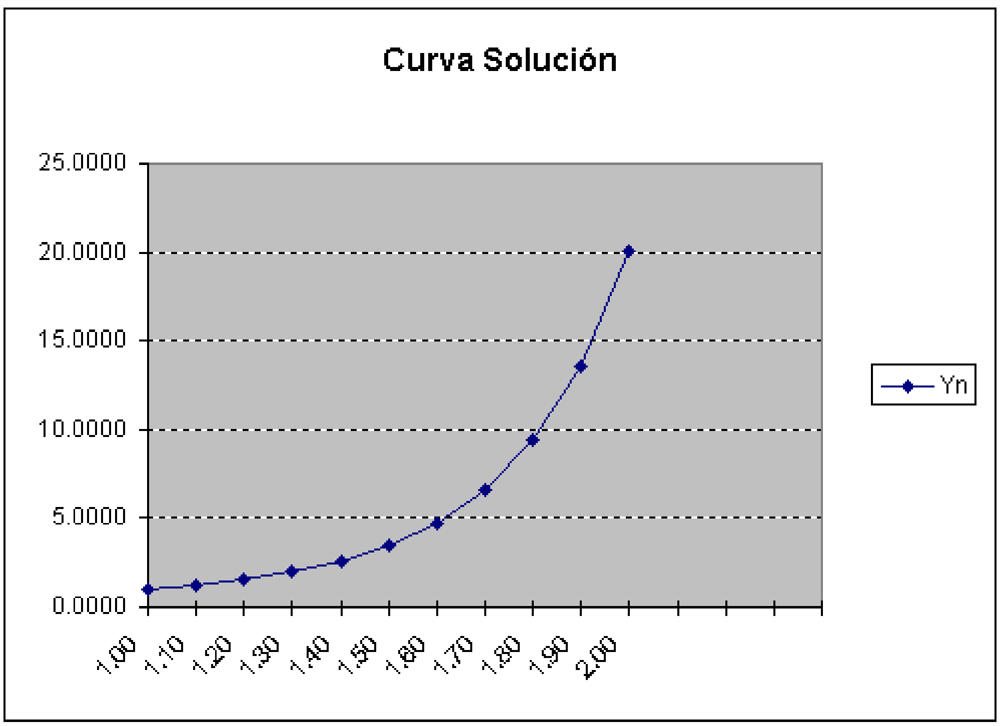
CASO 4:

$$\Delta y \cong (\Delta y)_5 = \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$
$$k_1 = f(x_0, y_0)h$$
$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{3}k_1\right)h$$
$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 - \frac{1}{3}k_1 + k_2\right)h$$
$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_1 - k_2 + k_3)h$$

El proceso de solución basado en el CASO 3 se conoce usualmente como *"El Método de Runge-Kutta"*

Ejemplo de solución de una Ecuación Diferencial de Primer Orden por el Método de Runge-Kutta: y'=2xy

n	Xn	Yn	k1	k2	k3	k4	kprom
0	1.00	1.0000	0.20000	0.23100	0.23426	0.27154	0.23367
1	1.10	1.2337	0.27141	0.31496	0.31997	0.37287	0.31902
2	1.20	1.5527	0.37265	0.43475	0.44252	0.51876	0.44099
3	1.30	1.9937	0.51836	0.60827	0.62041	0.73195	0.61795
4	1.40	2.6116	0.73126	0.86341	0.88257	1.04826	0.87858
5	1.50	3.4902	1.04706	1.24426	1.27483	1.52481	1.26834
6	1.60	4.7586	1.52274	1.82157	1.87088	2.25401	1.86028
7	1.70	6.6188	2.25040	2.71041	2.79091	3.38751	2.77342
8	1.80	9.3923	3.38121	4.10066	4.23375	5.17788	4.20465
9	1.90	13.5969	5.16682	6.31032	6.53331	8.05208	6.48436
10	2.00	20.0813	8.03251	9.87998	10.25872	12.74279	########



Método de Runge – Kutta ejemplo resuelto con detalles $y' = 2xy$; $f(x,y) = 2xy$; $y(1) = 1$; $h = 0.10$				$k_1 = hf(x_n, y_n)$ $k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$ $k_{prom} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$		$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$ $k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$	
0	$x_{n+1} = x_n + h$	$y_{n+1} = y_n + k_{prom}$	k_1	k_2	k_3	k_4	k_{prom}
1	$x_1 = 1.0000$	$y_1 = 1.0000$	$x_1 = 1.0000$ $y_1 = 1.0000$ $f = 2.0000$ $k_1 = 0.2000$	$x_1 + \frac{h}{2} = 1.0500$ $y_1 + \frac{k_1}{2} = 1.1000$ $f = 2.3100$ $k_2 = 0.2310$	$x_1 + \frac{h}{2} = 1.0500$ $y_1 + \frac{k_2}{2} = 1.1155$ $f = 2.34255$ $k_3 = 0.234255$	$x_1 + h = 1.1000$ $y_1 + k_3 = 1.2342$ $f = 2.715361$ $k_4 = 0.271536$	$k_{prom} = 0.233674$
2	$x_2 = 1.1000$	$y_2 = 1.2337$	$x_2 = 1.1000$ $y_2 = 1.2337$ $f = 2.714083$ $k_1 = 0.27141$	$x_2 + \frac{h}{2} = 1.1500$ $y_2 + \frac{k_1}{2} = 1.3694$ $f = 3.14962$ $k_2 = 0.314962$	$x_2 + \frac{h}{2} = 1.1500$ $y_2 + \frac{k_2}{2} = 1.3911$ $f = 3.199716$ $k_3 = 0.319971$	$x_2 + h = 1.2000$ $y_2 + k_3 = 1.5537$ $f = 3.7288$ $k_4 = 0.37288$	$k_{prom} = 0.319024$
3	$x_3 = 1.2000$	$y_3 = 1.5527$	$x_3 = 1.2000$ $y_3 = 1.5527$ $f = 3.72648$ $k_1 = 0.37265$	$x_3 + \frac{h}{2} = 1.2500$ $y_3 + \frac{k_1}{2} = 1.7390$ $f = 4.34756$ $k_2 = 0.434756$	$x_3 + \frac{h}{2} = 1.2500$ $y_3 + \frac{k_2}{2} = 1.7701$ $f = 4.42519$ $k_3 = 0.44252$	$x_3 + h = 1.3000$ $y_3 + k_3 = 1.99522$ $f = 5.187572$ $k_4 = 0.51876$	$k_{prom} = 0.440994$
4	$x_4 = 1.3000$	$y_4 = 1.9937$					