Ejemplo Resuelto del Método de Ecuaciones Exactas

Partimos de una función $z = f(x,y)$

$$f(x,y) = x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + 4y^3$$

y construimos su familia de curvas de nivel:

$$f(x,y) = \underline{\underline{x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + 4y^3 = c}} \quad (1)$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy = 0$$

y construimos una ecuación diferencial con ella:

$$\left(5x^4 - 6xy^4 + 2y^2\right)\cdot dx + \left(12y^2 + 4xy - 12x^2y^3\right)\cdot dy = 0 \quad (2)$$

$$M(x,y) = 5x^4 - 6xy^4 + 2y^2 \quad \Rightarrow \quad M_y = -24xy^3 + 4y$$

$$N(x,y) = 12y^2 + 4xy - 12x^2y^3 \quad \Rightarrow \quad N_x = 4y - 24xy^3$$

como $M_y = N_x$ *la ecuación si es exacta*

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M \therefore \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 6xy^4 + 2y^2}} \quad (3)$$

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N \therefore \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial y} = 12y^2 + 4xy - 12x^2y^3}} \quad (4)$$

Dadas las ecuaciones (3) *y* (4) *tenemos tres métodos para resolverlas y encontrar la familia de curvas de nivel*

MÉTODO "A"

$$de\ (3):\ f(x,y) = \int M\cdot dx = \int \left(5x^4 - 6xy^4 + 2y^2\right)\cdot dx$$

$$\therefore \quad f(x,y) = x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + h(y)$$

$$de\ (4):\ \frac{\partial f}{\partial y} = -12x^2y^3 + 4xy + \frac{dh}{dy} = N(x,y)$$

$$-12x^2y^3 + 4xy + \frac{dh}{dy} = 12y^2 + 4xy - 12x^2y^3$$

$$\frac{dh}{dy} = 12y^2 \Rightarrow \quad h = \int 12y^2dy \Rightarrow \quad h(y) = 4y^3$$

$$\therefore \quad f(x,y) = x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + 4y^3$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + 4y^3 = c}}$$

es la solución de (2)

MÉTODO "B"

$$de\ (4):\ f(x,y) = \int N\cdot dy = \int \left(12y^2 + 4xy - 12x^2y^3\right)\cdot dy$$

$$\therefore \quad f(x,y) = 4y^3 + 2xy^2 - 3x^2y^4 + g(x)$$

$$de\ (3):\ \frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - 6xy^4 + \frac{dg}{dx} = M(x,y)$$

$$2y^2 - 6xy^4 + \frac{dg}{dx} = 5x^4 - 6xy + 2y^2$$

$$\frac{dg}{dx} = 5x^4 \Rightarrow \quad g = \int 5x^4dx \Rightarrow \quad g(x) = x^5$$

$$\therefore \quad f(x,y) = 4y^3 + 2xy^2 - 3x^2y^4 + x^5$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + 4y^3 = c}}$$

es la solución de (2)

MÉTODO "C"

$$de\ (3):\ f(x,y) = \int M\cdot dx = \int \left(5x^4 - 6xy^4 + 2y^2\right)\cdot dx$$

$$\therefore \quad f(x,y) = x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + h(y) \quad (5)$$

$$de\ (4):\ f(x,y) = \int N\cdot dy = \int \left(12y^2 + 4xy - 12x^2y^3\right)\cdot dy$$

$$\therefore \quad f(x,y) = 4y^3 + 2xy^2 - 3x^2y^4 + g(x) \quad (6)$$

comparando las ecuaciones (5) *y* (6) *tenemos:*

$$\therefore \quad f(x,y) = x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + 4y^3$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + 4y^3 = c}}$$

es la solución de (2)